ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ МИНИСТЕРСТВА СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет

Научные труды Дальрыбвтуза

Выпуск 19

Владивосток
2007

УДК 378
ББК 74.58
Д 156

ББК 74.58

Д 156 Научные труды Дальрыбвтуза. Владивосток: Дальрыбвтуз, 2007. Вып. 19. 484 с.

ISBN 978-5-88871-399-0

В сборнике научных трудов рассмотрены научно-технические, экономико-финансовые, социальные и международные аспекты фундаментальных и прикладных исследований в области судовождения, промышленного рыболовства, технологии рыбных продуктов, водных биоресурсов и образования.

Приводятся результаты исследований по широкому спектру научно-исследовательских работ.

ISBN 978-5-88871-399-0

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517

ОБРАТНАЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Т.В. Беспалова, Дальрыбвтуз, Владивосток

Рассмотрены прямые и обратные краевые задачи для стационарных уравнений Максвелла, возникающие при рассмотрении субдифференциальных определяющих соотношений.

Данная статья является продолжением исследования, начатого в работах [1], где была изучена нестационарная модель для поляризуемой среды, а также работ [2, 3], в которых рассматривалась задача о гармонических электромагнитных колебаниях в поляризуемой среде.

Отметим, что изучение введенных в работе вариационных неравенств позволяет рассмотреть широкий класс физически интересных постановок краевых задач для уравнений Максвелла, причем задачи с классическими краевыми условиями для системы уравнений Максвелла являются частными случаями рассматриваемой задачи. В качестве приложения полученных результатов рассмотрена задача об определении областей постоянной проводимости по пороговым значениям поля. Кроме того, рассмотрена обратная субдифференциальная задача для уравнений Максвелла в гармоническом режиме.

1. Постановка субдифференциальной задачи. Рассмотрим распространение электромагнитных волн в однородной изотропной среде в R^3 с диэлектрической постоянной ε, магнитной проницаемостью μ и проводимостью σ. Электромагнитные колебания с частотой ω будем описывать векторами напряженности электрического поля и магнитной индукции

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \mathrm{Re}\{\, E(x)\exp(-i\omega t)\}, \\ B(x,t) &= \mathrm{Re}\{\, B(x)\exp(-i\omega t)\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $E(x), B(x)$ – комплексные амплитуды напряженности электрического поля и магнитной индукции соответственно.

Обозначим через $j = \mathrm{Re}\{j(x)\exp(-i\omega t)\}$ плотность тока, определяемого полями (1), а через $j_e = \mathrm{Re}\{g(x)\exp(-i\omega t)\}$ плотность тока, обусловленного сторонними ЭДС.

Из уравнений Максвелла с произвольной зависимостью от времени для комплексных амплитуд E, B, j, g получаем следующие соотношения:

$$rotE = i\omega B, rotB = \mu(j - i\omega\varepsilon E + g), \tag{2}$$

где $\varepsilon, \mu, \sigma, \omega$ – известные положительные постоянные.

Пусть Ω – область в R^3 с ограниченной границей Γ класса C^2, при этом считаем границу Γ области Ω идеально проводящей. Тогда

$$E_\tau = E - (E \cdot n)n = 0, x \in \Gamma. \tag{3}$$

Здесь n – единичный вектор внешней нормали к Γ. Условие (3) означает равенство нулю касательных компонент вектора E на границе Γ.

Предположим также, что вектор j удовлетворяет субдифференциальному соотношению

$$j \in \partial\varphi(E), \tag{4}$$

которое понимается поточечно, т.е. выражает связь между $j(x)$ и $E(x)$ в каждой точке $x \in \Omega$. Здесь $\varphi : C^3 \to (-\infty; +\infty]$ – выпуклая полунепрерывная снизу (п.н.сн.) функция (C^3 – пространство векторов $v = (v_1, v_2, v_3)$ с комплексными компонентами), $\varphi \neq \infty$. Через $\partial\varphi \subset C^3$ обозначен субдифференциал функции φ на элементе E, т.е. множество

$$\partial\varphi(E) = \{j \in C^3 : \varphi(v) - \varphi(E) \geq \operatorname{Re}(j_k \cdot \overline{(v - E)_k}\} \forall v \in C^3\}.$$

Здесь и далее считается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Таким образом, субдифференциальная краевая задача для системы уравнений Максвелла заключается в отыскании решения системы (2) при заданной функции g, удовлетворяющего граничному условию (3) и соотношению (4).

Для определения обобщенного решения краевой задачи (2) – (4) распространим поточечное субдифференциальное соотношение (4) на функциональное комплексное пространство $L^2(\Omega)$. Для этого введем функционал Φ, заданный на $L^2(\Omega)$ формулой

$$\Phi(E)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega}\varphi(E(x))dx, & \text{если } \varphi(E)\in L^1(\Omega),\\ +\infty, & \text{иначе.}\end{cases} \qquad (5)$$

Тогда аналогично [4, с. 133] можно показать, что функционал Φ является выпуклым п.н.сн. собственным на $L^2(\Omega)$ ($\Phi(E)\in(-\infty;+\infty],\Phi(E)\neq+\infty$). Условие $j\in\partial\Phi(E)$ эквивалентно неравенству $\Phi(v)-\Phi(E)\geq \mathrm{Re}\{(j,v-E)\}\forall v\in L^2(\Omega)$, причем условие $j\in\partial\Phi(E)$, где $j,E\in L^2(\Omega)$, выполняется тогда и только тогда, когда для $j(x),E(x)\in C^3$ выполняется включение $j(x)\in\partial\varphi(E(x))$ п.в. в Ω .

Здесь и далее через $|v|$ и (u,v) будем обозначать норму и скалярное произведение в комплексном пространстве

$$L^2(\Omega),(u,v)=\int\limits_{\Omega}u_k\overline{v_k}dx.$$

Определим гильбертово пространство

$$V=\{v\in L^2(\Omega):rotv\in L^2(\Omega),v_{\tau}=0,x\in\Gamma\}$$

над полем комплексных чисел C как замыкание множества гладких комплекснозначных вектор-функций с нулевыми касательными составляющими на границе Γ по норме $\|v\|=(|v|^2+|rotv|^2)^{1/2}$. Отметим, что в силу определения пространства V для любых $v,w\in V$ справедливо равенство [1, с. 316]

$$(rotw,v)=(w,rotv). \qquad (6)$$

В пространстве V рассмотрим эффективную область функционала $\Phi:K=\{v\in V:\Phi(v)<+\infty\}$. В силу выпуклости и полунепрерывности снизу функционала Φ множество K является выпуклым и замкнутым в V .

2. Вывод вариационного неравенства. Для вывода вариационного неравенства, соответствующего задаче (2) – (4), умножим второе уравнение в (2) скалярно на $E-v,v\in V$ и воспользуемся тождеством (6). Тогда получим

$$(B, rot(E-v)) = (\mu j, E-v) + (\mu(g-i\omega E), E-v). \tag{7}$$

Используя определение субдифференциала

$$\Phi(v) - \Phi(E) \geq \mathrm{Re}\{(j, v-E)\} \forall v \in V ,$$

имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{(B, rot(E-v)) - (\mu(g-i\omega\varepsilon E), E-v)\} \geq \\ &\geq \mu(\Phi(E) - \Phi(v)) \forall v \in V. \end{aligned} \tag{8}$$

В определенном смысле справедливо и обратное, т.е. для достаточно гладких комплексных вектор-функций E и B, удовлетворяющих (2), справедливо соотношение (4). В частности, если предположить, что $rotB \in L^2(\Omega)$, то из (8) и (6) получаем

$$\mathrm{Re}\{((1/\mu) rotB + i\omega\varepsilon E - g, E-v)\} - \Phi(E) + \Phi(v) \geq 0 \forall v \in V.$$

Это означает, что величина $j = (1/\mu) rotB + i\omega\varepsilon E - g$ удовлетворяет соотношению $\mathrm{Re}\{(j, E-v)\} \geq \Phi(E) - \Phi(v)$, т.е. $j \in \partial\Phi(E)$ тогда и только тогда, когда $j(x) \in \partial\varphi(E(x))$ п.в. в Ω.

Таким образом, на основании неравенства (8), учитывая первое из уравнений (2), приходим к следующей постановке.

З а д а ч а 1. Найти элемент $E \in V$ такой, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\{a(E, E-v) - (\mu\omega^2 \varepsilon E + f, E-v)\} - \\ &- \mu\omega(\Phi(E) - \Phi(v)) \geq 0 \forall v \in V. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $a(u,v) = (rotu, rotv), f = i\omega\mu g.$

3. Корректность задачи 1. Пусть функционал Φ имеет представление $\Phi = I_K + \Phi_0$, где

$$I_K(v) = \begin{cases} 0, & \text{если} v \in K, \\ +\infty, & \text{иначе}, \end{cases}$$

т.е. I_K есть индикаторная функция множества K. Предположим, что функционал Φ_0 дифференцируем по Гато в каждой точке $v \in V$, т.е.

предел $\lim\limits_{\Theta\to+0}(\Phi_0(w+\Theta h)-\Phi_0(w))/\Theta=\mathrm{Re}\{\langle\Phi_0'(w),h\rangle\}$ существует для любого $h\in V$, причем $\Phi_0'(w)\in V'$, где через V' обозначаем пространство сопряжено-линейных непрерывных функционалов, определенных на $V,\langle\Phi_0'(w),h\rangle$ – значение функционала Φ_0' на элементе $h\in V$.

Будем предполагать, что градиент Φ_0' удовлетворяет следующим условиям:

а) $\forall u,v,w\in V$ функция

$$\lambda\to\mathrm{Re}\{\langle\Phi_0'(u+\lambda v),w\rangle\} \tag{10}$$

непрерывна как функция из R в R (свойство семинепрерывности);

б) функционал Φ_0' является сильно монотонным в следующем смысле:

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\{\langle\Phi_0'(w_1)-\Phi_0'(w_2),w_1-w_2\rangle\}\geq\\ \geq\alpha|w_1-w_2|^2\,\forall w_1,w_2\in V,\alpha=const>0.\end{gathered} \tag{11}$$

По определению субдифференциала

$$\Phi(w)-\Phi(E)\geq\mathrm{Re}\{(j,w-E)\}\forall w\in K.$$

Положим $w=E+\Theta h$, где $h=v-E$ для любых $v\in K,\Theta>0$, разделим на Θ и перейдем к пределу при $\Theta\to+\infty$.

Тогда $\lim\limits_{\Theta\to+0}(\Phi(E+\Theta h)-\Phi(E))/\Theta\geq\mathrm{Re}\{(j,h)\}$.Так как на множестве K функционал Φ совпадает с Φ_0, то последнее неравенство эквивалентно соотношению $\mathrm{Re}\{\langle\Phi_0'(E),E-v\rangle\}\leq\mathrm{Re}\{(j,E-v)\}\forall v\in K$, используя которое, на основании (7), получаем неравенство

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}\{a(E,E-v)-(\mu\omega^2\varepsilon E+f,E-v)\}-\\ -\mu\omega\mathrm{Re}\{\langle\Phi_0'(E),E-v\rangle\}\geq0\forall v\in K.\end{gathered} \tag{12}$$

Т е о р е м а 1. Пусть функционал Φ удовлетворяет свойствам (10), (11). Кроме того, предположим, что существует элемент $v_0\in V$

такой, что $\partial\Phi(v_0) \neq \varnothing$. Тогда для произвольной комплексной вектор-функции $g \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение задачи 1.

Доказательство данной теоремы было получено в [9].

4. Субдифференциальная обратная задача, связанная со стационарными уравнениями Максвелла. Рассмотрим систему уравнений (2) с граничными условиями (3). Пусть значения плотности токов, обусловленных действиями сторонних ЭДС g, неизвестны. Задача заключается в отыскании g, а также соответствующих E и B, удовлетворяющих системе (2), граничному условию (3) и дополнительному субдифференциальному условию

$$E \in \partial\varphi(g), \tag{13}$$

где $\varphi(g)$ – выпуклая п.н.сн. собственная функция на C^3. Задачу (2), (3), (13) можно рассматривать как субдифференциальную обратную задачу для уравнений Максвелла в гармоническом режиме с неизвестной правой частью g.

Изучение поставленной задачи также сводится к исследованию некоэрцитивного вариационного неравенства. Определим функционал

$$\Psi(g) = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} \varphi(g(x))dx, & \varphi(g) \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, функционал Ψ выпуклый п.н.сн. собственный на $L^2(\Omega)$, причем $E \in \partial\Psi(g)$, где $E, g \in L^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для $E(x), g(x) \in C^3$ выполняется включение $E(x) \in \partial\varphi(g(x))$ п.в. в Ω [4, с. 133].

Отметим [8, с. 61], что условие $E \in \partial\Psi(g)$ эквивалентно условию $g \in \partial\Phi(E)$, где функционал $\Phi : V \to V', \Phi = \Psi^*$, т.е. Φ является сопряженным к $\Psi, \Phi = \sup\{(h,v) - \Psi(h), h \in V'\}$.

Кроме того, функционал Φ также является выпуклым п.н.сн. собственным на $L^2(\Omega)$.

Таким образом, приходим к следующей постановке.

З а д а ч а 2. Найти элемент $E \in V$ такой, что

$$\operatorname{Im}\{a(E, E - v) - (k^2 E, E - v)\} - \mu\omega(\Phi(E) - \Phi(v)) \geq 0 \forall v \in V,$$

где $k^2 = \mu\omega^2(\varepsilon + i\sigma/\omega)$.

Единственность и разрешимость задачи 2 вытекает из теоремы 1, если в постановке задачи 1 функционал Φ заменить на

$$(\sigma/2)\int_\Omega |E|^2 dx + \Phi(E).$$

Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть существует элемент $E_1 \in V$ такой, что $\partial\Phi(E_1) \neq$ Ø. Тогда существует единственное решение задачи 2.

Рассмотрим частный случай постановки субдифференциальной обратной задачи для уравнений (2) при условии, что задана информация о решении E и «структуре» вектора g.

Пусть вектор g ограничен, т.е. $|g| \le |g_0|$, кроме того, заданы условия

$$\begin{aligned} &|E| \le |E_0| \Rightarrow && g = 0; \\ &|E| > |E_0| \Rightarrow && \begin{cases} g = c(E - E_0), & |c(E - E_0)| \le |g_0|, \\ g = g_0, & |c(E - E_0)| > |g_0|, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

где E_0 – некоторое пороговое значение поля, $c > 0$ – известная константа.

Если функционал $\phi = \varphi^*$ задать формулой

$$\phi(E) = \begin{cases} 0, |E| \le |E_0|, \\ (c/2)|E - E_0|^2, |c(E - E_0)| \le |g_0|, |E| > |E_0|, \\ \mathrm{Re}\{(E, g)\}, |c(E - E_0)| > |g_0|, |E| > |E_0|, \end{cases} \tag{15}$$

то субдифференциальное соотношение (13) будет соответствовать условиям (14). Соответствующая вариационная задача является частным случаем задачи 2, если функционал Φ определяется при помощи (15). Корректность соответствующей вариационной постановки вытекает из теоремы 2.

Библиографический список

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М., 1980.

2. *Беспалова Т.В., Чеботарев А. Ю*. Моделирование электромагнитных колебаний в поляризуемой среде и вариационные неравенства. Владивосток, 1993. (Препринт / ИПМ ДВО РАН).

3. *Чеботарев А.Ю.* Корректность задачи об электромагнитных колебаниях в поляризуемой среде // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1993. Вып. 107.

4. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. М., 1989.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

6. *Барфут Ж., Тейлор Дж.* Полярные диэлектрики и их применение. М., 1981.

7. *Райзер Ю.П.* Основы современной физики газоразрядных процессов. М., 1980.

8. *Barbu V*. Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems. 1993.

9. *Беспалова Т.В., Чеботарев А.Ю.* Вариационные неравенства и обратные субдифференциальные задачи для уравнений Максвелла в гармоническом режиме // Дифф. уравнения, 2000. Т. 36. № 6.

УДК 517.5

КОНСТРУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Апехин Ю.А., Рыжкина Т.А., Дальрыбвтуз, Владивосток

Рассмотрены варианты задач Дирихле, допускающие бесконечное множество решений, разработаны алгоритмы получения потенциала в простейших векторных полях, исследована структура полученных решений.

Введение

Потенциалы важнейших векторных полей, рассматривающихся в физике, являются гармоническими функциями. В общем случае теорию гармонических функций называют теорией потенциала [1].

Если ограничиться функциями двух переменных, т.е. исследовать плоское векторное поле *D,* то гармонической в области *D* функцией называется действительная функция U(z), $z = x + iy$, обладающая в этой области непрерывными частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – дифференциальный оператор.

Уравнение (1) называют уравнением Лапласа.

Совокупность гармонических функций – это совокупность всех решений уравнения Лапласа. Для выделения определенного решения учитывают дополнительные условия, соответствующие рассматриваемому полю *D*. Для уравнения Лапласа они формулируются в виде так называемых краевых условий. Простейшее из таких условий сводится к заданию значений искомой функции в каждой точке ζ границы ∂*D* области *D*.

1. Цель исследования. Основные сведения по теории потенциала

Целью данной работы является разработка алгоритмов построения функций потенциала на практике. Для ее достижения используются известные результаты теории потенциала о разрешимости задачи Дирихле (ЗД). Такое название носит задача о решении уравнения (1) при краевом условии

$$U(\partial D) = f(\zeta). \tag{2}$$

Обобщенная формулировка ЗД. На границе ∂*D* области *D* задана функция f (ζ), непрерывная всюду, кроме конечного числа точек ζ_k, $k = \overline{1, n}$, где она имеет точки разрыва непрерывности первого рода. Найти гармоническую и ограниченную в области *D* функцию *U*(*z*), где $z \in D$, принимающую значения *f* (ζ) во всех точках непрерывности этой функции.

Теорема 1. В данной области при заданной функции *f* (ζ) существует не более одного решения обобщенной ЗД.

Доказательство этого результата, к примеру, содержится в источниках [2;3]. Более того, не только единственность решения ЗД, но и его существование гарантируется для любой односвязной области *D* и любой кусочно-непрерывной функции *f* (ζ).

Нарушение условий теоремы 1 хотя бы в одной граничной точке области *D* приводит к отрицанию утверждения о единственности решения ЗД. Это отчасти составляет предмет заявленного исследования.

Решение обобщенной ЗД, как показано в [2;3], для единичного круга дает интеграл Пуассона.

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int U(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta, \tag{3}$$

где $z = re^{i\varphi}$, θ – аргумент ζ.

Существование решения ЗД фактически означает эквивалентность ЗД задаче конформного отображения области *D* на единичный круг. Взаимно-однозначное отображение области на другую область называется конформным, если оно обладает постоянством искажения линейных размеров и сохранением углов между кривыми в точках их пересечения по величине и направлению.

Известно, что любая аналитическая функция w = g (z) при условии $g'(z) \neq 0$. $z \in D$ осуществляет конформное отображение области определения. Аналитичность функции следует понимать в смысле однозначной определенности в каждой точке области *D* (однолистности) и представимости рядом Тейлора в окрестности каждой внутренней точки области *D* вида

$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k , \tag{4}$$

где $z_0 \in D$ – произвольная внутренняя точка области.

Окрестностью точки $z_0 \in D$ является некоторый круг $D_1 \subset D$ с центром в этой точке. Функции, представимые в окрестности каждой точки комплексной плоскости $C = \{z = x + iy, z \neq \infty\}$ рядом (4), называются целыми, не имеющими особых точек в *C*, [4].

Известно, что для аналитической функции

$$g(z) = U(z) + iV(z) \tag{5}$$

как дифференцируемой функции в области D необходимо и достаточно выполнение условий Коши-Римана [2; 3],

$$U_x' = V_y' , U_y' = -V_x' . \tag{6}$$

Условия (6) представляют действительную и мнимую части *U.V* функции *g* (*z*) как сопряженные гармонические функции, входящие в совокупность решений ЗД.

По теореме Б. Римана любая односвязная область, граница которой содержит более чем одну точку, может быть конформно отображена на внутренность единичного круга $|w| \prec 1$. Иначе, существует аналитическая функция *g*(*z*), $z \in D$, такая что $|g(z)| \prec 1$, $g'(z) \neq 0$, [4]. В свою очередь, единичный круг преобразуется в верхнюю полуплоскость $H = \{t : t = \xi + i\eta, \eta \succ 0\}$ с помощью функции

$$t = \frac{i(e^{i\alpha} + w)}{e^{i\alpha} - w} , \ \alpha \in R, \tag{7}$$

изменение α означает поворот круга относительно центра $w = 0$. Формула (7) может быть получена с помощью четного числа инверсий (преобразований симметричных точек относительно окружностей и прямых) [5]. Получение таких формул обеспечивается геометрической теорией функций и составляет другую часть исследования для достижения поставленной цели.

На основании предыдущих рассуждений изучение векторных полей имеет смысл первоначально рассматривать в простейших круговых областях, при этом верхняя полуплоскость интерпретируется как круг бесконечного радиуса. Функция потенциала для исходного поля получается по правилу замены переменных [1; 3].

2. Примеры неединственности решения ЗД. Теория аналитических функций в процедуре нахождения потенциала

Пусть векторное поле поддерживается потенциалом *U* в *H*.

Простейшая постановка ЗД в данном случае имеет вид:

доказать существование гармонической функции в *H*, которая обращается в нуль на вещественной оси.

Решение. Здесь нет условия кусочной непрерывности *U* в точке $t = \infty$. Требуется доказать, что функция существует. Очевидно, что тривиальное решение *U* = 0 в полной комплексной плоскости $\overline{C} = C \cup \infty$ не представляет интереса. Используя связь теории рядов с теорией аналитических функций, искомую функцию *U* по принципу симметрии [2] можно продолжить в нижнюю полуплоскость, где $\eta \prec 0$. Так как в конечных точках верхней полуплоскости *U* принимает конечные значения $U_1(t)$ по самой постановке ЗД, то продолженная функция $U_2 = -U_1(\overline{t})$ есть гармоническая функция в нижней полуплоскости, $\overline{t} = \xi - i\eta$. При условии существования функции

$$U = \begin{cases} U_1(t), \\ -U_1(\overline{t}) \end{cases}$$

появляется возможность найти сопряженную гармоническую функцию $V(t)$. Известно, что отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения. Тот факт, что $U = 0$ на вещественной оси [2] означает неотрицательность функции *U* в *H*.

Таким образом, можно в дальнейшем рассматривать аналитическую функцию $f(t) = U(t) + iV(t)$. По принципу максимума модуля аналитической функции $f(t) \neq const$ [2; 3] следует, что $|f(t)| \prec \infty$, $t \in H, t \neq \infty$ и, более того, $f(t)$ есть целая функция в *H* вида

$$f(t) = \sum c_k t^k, t = \xi + i\eta . \qquad (8)$$

Сужение (8) на вещественную ось $\eta = 0$ представляется формулой сходящегося степенного ряда

$$f(\xi) = \sum_0^\infty c_k \xi^k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k)\xi^k . \qquad (9)$$

Из (9) вещественная и мнимая части $f(\xi)$ имеют вид

$$U(\xi) = \sum_0^\infty c_k \xi^k , V(\xi) = \sum_0^\infty \beta_k \xi^k . \qquad (10)$$

По краевому условию (2) следует

$$U(\xi) = \sum_0^\infty c_k \xi^k = 0, \text{ где } \alpha_k = U^{(k)}/k! = 0 . \qquad (11)$$

Таким образом, $f(\xi) = i\sum_0^\infty \beta_k \xi^k$. Применением условий Коши-Римана (6) из равенства $U_\xi(\xi,0) = 0$ получается равенство $V_\eta(\xi,0) = 0$, т.е. $V(\xi,0) = \nu(\xi)$ не зависит от η, что влечет за собой равенство $V_{\eta\eta}(\xi,0) = 0$. Так как $V(t)$ есть гармоническая функция, для нее справедливо уравнение Лапласа при η =0

$$\nu_{\xi\xi} + \nu_{\eta\eta} = 0 .$$

С учетом того, что $\nu_{\eta\eta} = V_{\eta\eta}(\xi,0) = 0$, остается считать $\nu_{\xi\xi} = 0$, а это означает, что все производные $\nu^{(k)}$ по ξ порядка $k \geq 2$ обращаются в нуль. Поскольку $f(t) \neq const$ на вещественной оси, ряд Тейлора для функции $f(t)$ имеет конечное число слагаемых

$$f(t) = i(\beta_0 + \beta_1\xi). \tag{12}$$

Формула (12) имеет аналитическое продолжение в *H* вида

$$f(t) = i(\beta_0 + \beta_1\xi + i\beta_1\eta) = -\beta_1\eta + i(\beta_0 + \beta_1\xi). \tag{13}$$

Итак, искомая функция, как можно видеть из (13), определяется формулой $U(t) = -\beta_1\eta$, $-\beta_1 = A \geq 0$ или

$$U(t) = \frac{A(\bar{t} - t)}{2} \cdot i.$$

Если перейти в плоскость переменного *w* по формулет (7), из которой

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{t-i}{t+i}, \ \bar{t} = \frac{-i(e^{-i\alpha} + \overline{w})}{e^{-i\alpha} - \overline{w}},$$

то

$$U(t(w)) = A \cdot \frac{1-|w|^2}{1-\overline{w}e^{i\alpha} - we^{-i\alpha} + |w|^2} = A\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}, \tag{14}$$

$$w = re^{i\varphi}, \overline{w} = re^{-i\varphi}, \ |w| \prec 1.$$

Гармоническая функция (14) является ядром формулы Пуассона (3) с неопределенной неотрицательной константой.

Пример другого кругового векторного поля и ЗД следующий.

Найти решение для гармонической функции, отличной от тождественной постоянной, в круге $D = \{z : x^2 + y^2 \prec x\}$, непрерывной в $\overline{D}$, за исключением *z* = 0, и равной нулю всюду на границе ∂*D*, кроме *z* = 0.

Построение потенциала осуществляется методом, как в предыдущем примере, с помощью функции, аналитической в Н, имеющей в нуле существенно особую точку. Функция, отображающая D на Н, и разложение в ряд Лорана (обобщение ряда Тейлора) имеют вид соответственно

$$t = \frac{zi}{1-z}, \ f(t) = \sum_{0}^{\infty} c_k t^{-k}.$$

Формула для потенциала, как можно показать, имеет следующее выражение $U(z) = A\left(1 - \mathrm{Re}\left(1/z\right)\right)$.

Заключение

Приведенные примеры показывают эффективность методов комплексного анализа в решении прикладных задач, связанных с моделированием физических характеристик. Алгоритм построения функций потенциала разработан авторами работы. В частности, примеры показывают, что структура формул может быть представлена в виде двух слагаемых $U(z) = U_1(z) + U_2(z)$, где $U_2(z)$ без особых точек, а $U(z) = 0$ на границе ∂D.

Библиографический список

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Главиздат, 1953. 679 с.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002, 688 с.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.
4. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. М.: ИЛ, 1962. Т. 1, 362 с.
5. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.: ГОНТИ, 1936, 340 с.

УДК 51-7+639.2.053.8

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О РАЦИОНАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗРЕШЕНИЙ НА ВЫЛОВ ПРИ РЫБНОМ ПРОМЫСЛЕ

Иванко Н.С, Дальрыбвтуз; Абакумов А.И., ИАПУ ДВО РАН, Владивосток

Рассматривается задача оптимального распределения разрешения на промысел. Исследуются свойства множества оптимальных решений.

Введение

Рациональное распределение разрешенных объемов вылова при рыбном промысле в определенном районе моря или океана оказывается важной и до сих пор удовлетворительно не урегулированной проблемой в российском, да и мировом, рыболовстве [5, 7, 8]. Эта проблема обсуждается в публикациях в связи с многовидовым характером рыбного промысла [6].

Задача оптимизации распределения квот сформулирована формально [1]. В процессе решения этой задачи возникают особенности, которые анализируются в представленной работе.

Работа поддержана грантом ученого совета Дальрыбвтуза в 2007 г. и грантом ДВО РАН, проект № 06-III-А-01-458.

1. Постановка задачи

Рассматривается процедура распределения квот для определенного морского района рыбного промысла. Пусть имеется m объектов промысла (биологических видов или совокупностей родственных биологических видов) и n способов промысла (предприятий-судовладельцев с определенными типами судов и орудий лова). Задача посвящена расчету возможных суммарных объемов квот по объектам промысла, при которых вылов с учетом приловов будет равен общему допустимому улову. Эта задача требует разработки алгоритма поиска оптимального решения. Такой алгоритм был создан, реализован в виде компьютерной программы [2]. Но в процессе решения задачи обнаружился ряд особенностей, которые мы и обсуждаем здесь.

Имеется m объектов промысла и n способов промысла. Рассматривается принятый промысловый период – 1 год. Индексы $i, j = 1,\ldots,m$ соответствуют объектам промысла, индекс $k = 1,\ldots,n$ – способам промысла.

Используются следующие обозначения:

α_{ijk} – доля объекта i в вылове способом k при квоте на объект j (коэффициенты прилова); u_{jk} – квота вылова объекта j способом k; v_i – допустимый вылов объекта i.

Пусть u_{jk} – распределённые квоты с выполнением условия. Годовой общий допустимый улов v_j определяется на основе научных прогнозов и задаётся в начале промыслового периода.

Оценки реального вылова объекта i способом k получаем в виде $v_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ijk} \cdot u_{jk}$ как функции квот, и объекта i всеми способами промысла – $v_i = \sum_{j,k=1}^{m,n} \alpha_{ijk} \cdot u_{jk}$.

Критерием оптимальности является максимальная близость объемов вылова, к общему допустимому улову.

Пусть $v = (v_1,\ldots, v_m)$ – заданный вектор общего допустимого улова. Известны также коэффициенты $\alpha_{ijk} \geq 0$. Требуется найти такие расчётные оценки квот $u_{jk} \geq 0$, что

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j,k=1}^{m,n}\alpha_{ijk}\cdot u_{jk} - v_i\right)^2 \to \min . \tag{1}$$

2. Преобразование задачи

Введем обозначения: из матрицы коэффициентов промысла формируются n матриц коэффициентов промысла для каждого способа: $A_k = (\alpha_{ijk})_{i,j=1}^{m}$. Тогда общую матрицу коэффициентов промысла можно представить в виде: $A = (A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n)$. Получается матрица A размерности $m \times m \cdot n$. Аналогично составляются векторы квот по способам промысла: $u_k = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \ldots \\ u_{mk} \end{pmatrix}$. Тогда общий вектор-столбец значений квот имеет вид: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}$. В нем число компонент равно $m \cdot n$. Если в соответствующих пространствах типа R^n, R^m, $R^{m \cdot n}$ ввести норму (например, евклидову), то (1) можно переписать в виде

$$\Phi(u) = \|Au - v\|^2 \to \inf_{u \ge 0} .$$

Приведем задачу к стандартным обозначениям. Пусть $m \cdot n = p$, $v = b$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^{\nabla} \ge 0$, матрица A представлена в виде $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$, $\alpha_{ijk} \ge 0$. Здесь и далее значок «$^{\nabla}$» обозначает действие транспонирования. Вектор $u = x = (x_1, \ldots, x_p)^{\nabla}$ неотрицателен. Тогда

$$\Phi(u) = \Phi(x) = \|Ax - b\|^2 \to \inf_{x \ge 0} . \tag{1'}$$

Задача минимизации функционала (1') является стандартной, возникает, например, при обработке экспериментальных данных с применением известного метода наименьших квадратов для определения неизвестных параметров аппроксимирующего соотношения или уравнения регрессии. Но наша задача имеет особенности по сравнению со стандартной. В стандартной задаче решение по ряду причин существует и единственно, а в нашем случае, как мы увидим ниже, решение может не существовать, а если существует, то чаще всего не единственно.

Кроме того, матрица A в нашем случае является неотрицательной. Эти особенности порождают особенности свойств решений, которые мы и разбираем в статье.

Задачу можно решать методом градиентного спуска [3,10]. Производная Φ по x (градиент функции Φ) имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = 2\left(A^{\nabla} Ax - A^{\nabla} b\right). \tag{2}$$

Матрица $A^{\nabla} A$ имеет размерность $p \times p$. При этом ранг данной матрицы $rank\ (A^{\nabla} A) = rank\ (A) = r \le p$ [4].

В методе градиентного спуска начинаем с начального вектора $x_0 \ge 0$ и итерациями переходим к более «хорошим» значениям x^l в смысле функционала (1'). Относительное приращение $h = h_l$ на шаге l вычисляется из условия минимизации функции

$$\varphi_l(h) = \Phi\left(x - h \left.\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right|_{x = x^l} \right)$$

по формуле

$$h_l = \frac{\left\| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\|^2}{2 \cdot \left\| A \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right\|^2}. \tag{3}$$

Тогда следующее приближение ищется по формуле:

$$x^{l+1} = \max\left\{ x - h_l \left.\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right|_{x = x^l}, 0 \right\}. \tag{4}$$

Весь вопрос в том, какое же решение задачи (1') мы находим этим методом градиентного спуска.

3. Исследование задачи

Необходимое условие минимума функции Φ – это условие (2). При этом матрица A размерности p является неотрицательной. В условии (2) матрица $A^{\nabla}A$ неотрицательна, симметрична и неотрицательно определена [4].

Необходимые для экстремума (1') дифференциальные условия первого порядка приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} A^{\nabla}Ax = A^{\nabla}b \\ x \geq 0 \end{cases}. \qquad (5)$$

Неотрицательно определенная матрица $A^{\nabla}A$ имеет размерность $p \times p$.

Пусть $D = \{x \geq 0 | A^{\nabla}Ax = A^{\nabla}b\}$. Тогда D – выпуклое замкнутое множество. В общем случае один из элементов множества D можно найти решением вспомогательной оптимизационной задачи

$$\begin{cases} ez \to \inf \\ A^{\nabla}Ax + z = A^{\nabla}b \\ x \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Начальным допустимым решением в этой задаче является $x = 0, z = A^{\nabla}b$. Решение задачи (5) можно получить различными иными способами [4].

Отметим, что $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 2A^{\nabla}A$ неотрицательно определенная матрица и

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) &= \|Ax - b\|^2 + (\Delta x, A^{\nabla}Ax - A^{\nabla}b) + (A^{\nabla}Ax - A^{\nabla}b, \Delta,) + \|A\Delta\Delta\|^2 = \\ &= \|Ax - b\|^2 + 2(A^{\nabla}Ax - A^{\nabla}b, \Delta,) + \|A\Delta\Delta\|^2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Отсюда получаем, что в силу определения матрицы A и матрицы $A^{\nabla}A$ матрица вторых производных функционала Φ (x) неотрицательная и неотрицательно определенная для всех x. Это означает, что значения x, в которых первая производная функционала Φ (x) обращается в 0, – это точки минимума Φ (x).

Утверждение 1. Множество D – это множество минимумов функции $\Phi(x)$.

Доказательство.

Пусть x – точка минимума функции $\Phi(x)$, тогда $x \in D$. Пусть также $x + \Delta x \in D$. Тогда $\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + \|A \cdot \Delta x\|^2 \ge \Phi(x).$ Поменяв x и $x + \Delta x$ местами, получим $\Phi(x) \ge \Phi(x + \Delta x).$ Отсюда

$$\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x).$$

Утверждение доказано.

На выпуклом замкнутом множестве D можно искать оптимальные решения, подчиняющиеся другим условиям. Задача (1) (или (1')) обычно решается методом градиентного спуска или иными численными методами. Но в случае задачи о квотах в рыбном промысле мы имеем множество D оптимальных решений. Для выбора подходящих оптимальных решений полезно изучить свойства этого множества D. Из этих свойств следуют алгебраические способы поиска оптимальных решений.

Утверждение 2. Если $D \ne \emptyset$, то $D = (x_0 + L) \cap R_+^p$, где $x_0 \in D$, $L = \{y \in R^p | A^\nabla A y = 0\}$.

Доказательство. Пусть существует такой $x_0 \ge 0$, что $A^\nabla A x_0 = A^\nabla b$. Тогда $D = (x_0 + L) \cap R_+^p$, L – подпространство размерности $p - r$. С помощью его базиса можно описать множество D. $L = \operatorname{Ker} A^\nabla A$.

Утверждение доказано.

Заметим, что если $D = \emptyset$, то $\Phi(x)$ не имеет минимума.

Утверждение 3. Пусть $x_0 \in D$, $y \in L$, тогда выполняется $\Phi(x_0 + y) = \Phi(x_0)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (6):

$$\Phi(x_0 + y) = \|Ax_2 - b\|^2 + 2(A^\nabla A x_0 - A^\nabla b, y) + \|Ay\|^2,$$
$$\|Ax_0 - b\|^2 = \Phi(x_0), \ (A^\nabla A x_0 - A^\nabla b, y) = 0,$$
$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^\nabla A y, y) = 0,$$

т.е. получаем $\Phi(x_0 + y) = \Phi(x_0)$.

Утверждение 4. Если матрица A не имеет нулевых столбцов, то множество D ограничено.

Доказательство. Каждый элемент множества $x \in D$ представляется суммой $x = x_0 + y \geq 0, y \in L$. Нужно доказать, что множество таких y ограничено. Каждый вектор y можно представить в виде

$$y = y^+ - y^-, y^+ = \max\{ y, 0\}, y^- = -\min\{ y, 0\},$$

где max и min применяются покомпонентно. Заметим, что в векторах y^+ и y^- ненулевые компоненты стоят на разных местах. Из этого факта и неравенства $x_0 + y^+ - y^- \geq 0$ следует, что $0 \leq y^- \leq x_0$. Для y^+ оценку получаем следующим образом. Если матрица A не имеет нулевых столбцов, то в матрице $A^\nabla A$ все диагональные элементы положительны. Через $a > 0$ обозначим наименьший из диагональных элементов матрицы $A^\nabla A$. Тогда $A^\nabla A \geq aI$, где I – единичная матрица. Получаются следующие оценки:

$$A^\nabla A y^+ \geq a y^+ \text{ и } A^\nabla A y^+ = A^\nabla A y^- \leq A^\nabla A x_0.$$

Отсюда получаем

$$y^+ \leq \frac{1}{a} A^\nabla A x_0.$$

Тогда $-x_0 \leq y = y^+ - y^- \leq \frac{1}{a} A^\nabla A x_0$. Это означает ограниченность множества D.

Утверждение доказано.

Замечание. При наличии нулевых столбцов в матрице А возможна неограниченность множества оптимальных решений для функционала (1').

Отметим, что с точки зрения данных о промысле нулевой столбец матрицы A означает отсутствие возможностей вылова некоторого объекта данным способом промысла.

Заключение

Анализ множества оптимальных решений для задачи (1) или (1') показывает, что решение этой задачи может осуществляться не методом градиентного спуска, а алгебраическими методами описания множества D. На этом множестве могут находиться оптимальные решения, обладающие дополнительными свойствами, формулируемыми из разных содержательных соображений.

Библиографический список

1. *Абакумов А.И., Бочаров Л.Н., Каредин Е.П.* Модельный анализ многовидовых рыбных промыслов // Известия ТИНРО, 2004 Т. 138. С. 220-224.
2. *Абакумов А.И., Каредин Е.П., Решетняк Т.М.* Анализ многовидовых рыбных промыслов // Седьмой всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике: Тез. докл. «Обозрение прикладной и промышленной математики». 2006. Т. 13. Вып. 2. С. 261-262.
3. *Бахвалов Н.С*. Численные методы. М.: Наука, 1973.
4. *Гантмахер Ф.Р*. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
5. *Котенев Б.Н.* К новой стратегии управления водными биологическими ресурсами в морях России // Мат. междунар. науч.-практ. конф. «Повышение эффективности использования водных биологических ресурсов Мирового океана». М.: ВНИРО. 2005. С. 65-66.
6. *Кочиков В.Н.* Приловы и выбросы в мировом рыболовстве // Рыб. хоз-во. 2000. № 5. С. 24-27.
7. *Кочиков В.Н.* Ресурсами рыболовства нужно управлять более эффективно // Мат. междунар. науч.-практ. конф. «Повышение эффективности использования водных биологических ресурсов Мирового океана». М.: ВНИРО. 2005. С. 68-70.
8. *Кузнецов В.В., Кузнецова Е.Н.* Система регулирования изъятия при многовидовом промысле // Рыб. хоз-во. 1995. № 1. С. 31-32.
9. Модели многовидового управления / Под ред. Т. Редсета / Пер. с англ. М.: ВНИРО, 2002. 274 с.
10. *Сеа Ж.* Оптимизация: Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.